## Internationales Studienkolleg der Hochschule Kaiserslautern

**Semester:** Wintersemester 2022/2023
**FSP-Teilprüfung:** Mathematik WB2
**Datum:** 29.11.2022
**Dauer:** 90 Minuten
**Prüfer:** Dr. Jens Siebel

**Aufgabe 1**

In unserer Firma ist $x$ die Produktionsmenge von Gut X, und $y$ ist die Produktionsmenge von Gut Y. Der tägliche Gewinn ist $z(x, y) = x + 4 \cdot y - 500$. Bei der Produktion müssen wir einige Nebenbedingungen beachten:

(1) Wir können keine negativen Mengen produzieren.

(2) Unsere einzige Maschine läuft 15 Stunden pro Tag. Die beiden Güter haben folgende Produktionszeiten:

Gut X: $4\frac{\text{min.}}{Stück}$, Gut Y: $2\frac{\text{min.}}{Stück}$

(3) Wir können pro Tag maximal 200 Stücke von Gut X und maximal 350 Stücke von Gut Y verkaufen, und es gibt keine Lagerhaltung.

Bestimmen Sie die gewinnmaximalen Produktionsmengen und den maximalen Gewinn pro Tag *(12 Punkte)*.

**Aufgabe 2**

Kreuzen Sie jeweils das Feld mit der einzigen richtigen Antwort an *(12 Punkte)*.

- 1 Punkt für jede richtige Antwort,
- 0 Punkte für jede falsche bzw. fehlende Antwort.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a) | Für die Lagrange-Funktion $L(\lambda, x, y) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$ gilt immer: | | | |
| /1 | $L'_\lambda(\lambda, x, y) = -g(x, y)$ ☐ | $L''_{xx}(\lambda, x, y) = 0$ ☐ | $L''_{x\lambda}(\lambda, x, y) = L''_{xy}(\lambda, x, y)$ ☐ | $L'_x(\lambda, x, y) = 1$ ☐ |
| b) | $f'(x) = \sqrt{x}$ $\quad \mathbb{D}_f = [0, \infty[$ ist die erste Ableitung von: | | | |
| /1 | $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ ☐ | $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x}$ ☐ | $f(x) = \frac{3}{2} \cdot x \cdot \sqrt{x}$ ☐ | $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ ☐ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| c) | Der maximale Wertebereich des Korrelationskoeffizienten von Bravais-Pearson ist: | | | |
| **/1** | $[-1;1]$ ☐ | $]0;1]$ ☐ | $[0;1]$ ☐ | $[0;1[$ ☐ |
| d) | Es gilt $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=f''_{xx}(x,y)=f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=f''_{yy}(x,y)$ für: | | | |
| **/1** | $f(x,y)=e^{x-y}$ ☐ | $f(x,y)=e^{x\cdot y}$ ☐ | $f(x,y)=e^{x+y}$ ☐ | $f(x,y)=e^{y-x}$ ☐ |
| e) | Bei welcher Urliste gibt es einen Modus? | | | |
| **/1** | -2, -1, 1, 2 ☐ | 1, 1, 1, 1 ☐ | 1, -1, 1, -1 ☐ | 0, 1, 0, 1 ☐ |
| f) | $f(x)=(x-2)^2+1 \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ hat an $x=1$ die Tangentengleichung $y=t(x)=$ | | | |
| **/1** | $1$ ☐ | $-2\cdot x+4$ ☐ | $2\cdot x+4$ ☐ | $2\cdot x-4$ ☐ |
| g) | Die Determinante von $A=\begin{pmatrix} t^2 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ hat ihren minimalen Wert für: | | | |
| **/1** | $t=0$ ☐ | $t=-4$ ☐ | $t=1$ ☐ | $t=4$ ☐ |
| h) | Für welche Funktion gilt beim Newtonverfahren $x_1=\frac{x_0}{2}$? | | | |
| **/1** | $f(x)=x$ ☐ | $f(x)=e^x$ ☐ | $f(x)=\frac{1}{x}$ ☐ | $f(x)=x^2$ ☐ |
| i) | Für welche Funktion gilt $f'(x)=\ln[f(x)]$? | | | |
| **/1** | $f(x)=1^x$ ☐ | $f(x)=e^x$ ☐ | $f(x)=\ln(x)$ ☐ | $f(x)=x^2$ ☐ |
| j) | Die Lösungsmenge des LGS $\left(\begin{array}{cc\|c} e & e^2 & 1 \\ 1 & e & e \end{array}\right)$ ist: | | | |
| **/1** | $\mathbb{L}=\{x=0,\ y=1\}$ ☐ | $\mathbb{L}=\{x=1,\ y=1\}$ ☐ | $\mathbb{L}=\varnothing$ ☐ | $\mathbb{L}=\{x=1,\ y=-1\}$ ☐ |
| k) | Wenn bei einer Preiserhöhung von 1% die Gesamtnachfrage um 5% sinkt, dann ist die Preiselastizität der Nachfrage | | | |
| **/1** | $\varepsilon(p_{x0})=-0,05$ ☐ | $\varepsilon(p_{x0})=0,5$ ☐ | $\varepsilon(p_{x0})=-5$ ☐ | $\varepsilon(p_{x0})=-0,5$ ☐ |
| l) | Welche Funktion hat in ihrem Definitionsbereich kein globales Maximum? | | | |
| **/1** | $f(x)=x^2$ $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ ☐ | $f(x)=-x^2$ $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ ☐ | $f(x)=e^x$ $\mathbb{D}_f=]-\infty;2]$ ☐ | $f(x)=-x$ $\mathbb{D}_f=[-2;\infty[$ ☐ |
| **Summe: /12** | | | | |

**Aufgabe 3**

a) Welchen Wert muss $t$ haben, damit die Matrix $A=\begin{pmatrix}1 & -5 & -3\\ t & 2 & -8\\ 0 & -6 & 5\end{pmatrix}$ eine Inverse hat? *(4 Punkte)*

b) Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem (mit Lösungsweg):

$x-y-z=17$

$-x+y-z=-29$ *(6 Punkte).*

$x-2\cdot y+3\cdot z=45$

c) Bestimmen Sie $2\cdot B\cdot A^T$ für $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 6 & -1 & 1\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}4 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 6\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$ *(2 Punkte).*

**Aufgabe 4**

a) Über eine Funktion $f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R} \quad a,b,c,d\in\mathbb{R}$ sind nur die folgenden Informationen bekannt:

- $x_N=1$ ist Nullstelle.
- $P_{\max}(-1|3)$ ist Hochpunkt (lokales, inneres Maximum).
- $x_W=0$ ist Wendestelle.

Bestimmen Sie die Funktion *(6 Punkte).*

b) Ein Monopolist hat die Kostenfunktion $K(x)=40+2\cdot x^2$ und die Preis-Absatz-Funktion $p_x=P(x)=480-2\cdot x$.

b1) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Verkaufsmenge, den zugehörigen Preis und den maximalen Gewinn. Erstellen Sie auch eine Zeichnung *(5 Punkte).*

b2) Wie groß wären Preis und Angebotsmenge alternativ bei vollständiger Konkurrenz? *(1 Punkt)*

**Aufgabe 5**

Ein Markforschungsinstitut hat für verschiedene Marktpreise $p_x$ eines Gutes die Gesamtnachfrage X bestimmt:

| **Marktpreis** | 4€ | 7€ | 10€ | 13€ | 16€ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Gesamtnachfr.** | 57.000 Stk. | 48.000 Stk. | 39.000 Stk. | 27.000 Stk. | 18.000 Stk. |

a) Welche Art von Korrelation besteht zwischen dem Marktpreis und der Gesamtnachfrage? Interpretieren sie Ihr Ergebnis. Rechnen Sie bei allen Zwischenschritten auf vier Nachkommastellen genau.

Hinweise:

- durchschnittlicher Preis: 10€,
- Standardabweichung des Preises: 4,2426.

*(8 Punkte)*

b) Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate die lineare Gesamtnachfragefunktion $x = X^{NG}(p_x)$, und zeichnen Sie diese in ein Streudiagramm der Beobachtungswerte *(4 Punkte)*.